|  |
| --- |
| МИНИСТЕР СТВ О НАУКИ И В ЫСШЕГО ОБР АЗ ОВ АНИЯ Р ОССИЙСКОЙ ФЕДЕР АЦИ И  ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  « Н а ц и о н а л ь н ы й и с с л е д о в а т е л ь с к и й я д е р н ы й у н и в е р с и т е т « М И Ф И » |
| **Обнинский институт атомной энергетики –**  филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования  «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  **(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)** |

# ИНСТИТУТ ОБЩЕЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ (О)

## Кафедра Высшей математики

Одобрено на заседании

Ученого совета ИАТЭ НИЯУ МИФИ Протокол от 24.04.2023 № 23.4

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**для студентов**

**по освоению дисциплины**

|  |
| --- |
| **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА** |
| *название дисциплины* |
| для студентов направления подготовки |
| 04.03.02 Химия, физика и механика материалов |
| *код и название направления подготовки* |
| Химические и фармакологичские технологии |

Форма обучения: очная

**г. Обнинск 2023 г.**

# ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисцип- лины «Линейная алгебра» (рекомендуемый режим и характер учебной рабо- ты, в том числе в части выполнения самостоятельной работы) – комплекс ре- комендаций и разъяснений, позволяющий обучающимся оптимальным обра- зом организовать процесс изучения как теоретического учебного материала дисциплины, так и подготовки к практическим занятиям и/или лабораторным работам, в том числе проводимым с использованием активных и интерактив- ных технологий обучения.

* Цель дисциплины – теоретическая подготовка и получение практических навыков по линейной алгебре для успешного усвоения фундаментальных, общетехнических и специальных дисциплин учебного плана, а также для возможности изучения специальной литературы, в случае необходимости самостоятельного углубления математических знаний после окончания ВУЗа;
* развить логическое мышление студентов, привить потребность теоретиче- ского обоснования различных явлений.

Задачи дисциплины:

* создание у студентов достаточно широкой подготовки в области матема- тики и воспитание достаточно высокой математической культуры;
* сформировать навыки использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности;
* привить навыки самостоятельной работы с литературой по математике и ее приложениям;

Дисциплина «Линейная алгебра» реализуется в рамках обязательной части и относится к общепрофессиональному модулю.

Дисциплина изучается на 1 курсе в 2 семестре.

Основными видами учебной работы по данной дисциплине являются лекции, практические занятия, самостоятельная работа обучающихся. Для успешного освоения дисциплины студенты необходимо изучить лекционный материал и рекомендуемую литературу, отработать изученный материал на практических занятиях, выполнить задания для самостоятельной работы.

## 1 Лекции

Лекция – это важный источник информации по каждой учебной дисци- плине. Она ориентирует студента в основных проблемах изучаемого курса, направляет самостоятельную работу над ним.

Содержание лекционного курса по дисциплине «Линейная алгебра» представлено в таблице

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Неделя** | **Наименование раз- дела /темы дисцип-**  **лины** | **Содержание** |
| 1-4. | **Матрицы, определители и системы линейных уравнений** | |
| 1-2 | Матрицы и определи- тели | Матрицы, действия над матрицами.  Определитель квадратной матрицы n–го порядка. Свойства определителей. Минор. Алгебраическое дополнение. Разло- жения определителя по строке (столбцу). Методы вычисле- ния определителей. Обратная матрица. Условия существо- вания. Нахождение обратной матрицы. |
| 3-4. | Системы линейных уравнений | Система из n линейных уравнений с *n* неизвестными. Мат- ричная запись. Правило Крамера. Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о базисном миноре. Элементарные преобра- зования и ранг матрицы. Системы линейных уравнений.  Теорема Кронекера Капелли. Метод Гаусса. Однородная система, фундаментальная совокупность решений. Общее решение неоднородной системы. |
| 5-9 | **Линейные пространства и подпространства, базис, координаты, линейные опе- раторы** | |
| 5-6. | Линейные пространст- ва, размерность | Линейные пространства. Линейная зависимость и независи- мость элементов линейного пространства. Базис. Координа- ты вектора в базисе. Размерность. Изоморфизм линейных  пространств. Преобразование координат вектора при пере- ходе к новому базису. Подпространства линейного про- странства. Линейная оболочка векторов. Теорема о размер- ности линейной оболочки. Сумма и пересечение подпро- странств, теорема о связи их размерностей. Прямая сумма подпространств. |
| 7-9. | Операторы | Линейный оператор. Матричная запись оператора. Измене- ние матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия над линейными операторами. Обратимость операторов. Матрица обратного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг и дефект.  Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен оператора. Усло- вия существования базиса из собственных векторов. |
| 10-13. | **Евклидовы пространства** | |
| 10-12 | Евклидовы простран- ства | Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Ортогональные элементы. Ор- тонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама- Шмидта. Определители Грама и их приложения. Многомер-  ная евклидова геометрия. Ортогональное дополнение. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 12-13 | Операторы самосо- пряженный и ортого- нальный | Сопряженный, самосопряженный, унитарный и ортогональ- ный операторы. Приведение самосопряженного оператора к диагональному виду в ортонормированном базисе. |
| 14-16 | **Квадратичные формы** | |
| 14-16 | Приведение формы к каноническому виду | Билинейные и квадратичные формы в вещественном линей- ном пространстве. Канонический и нормальный вид квадра- тичной формы. Метод Лагранжа. Закон инерции. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к канониче- скому виду ортогональным преобразованием.  Неоднородный многочлен второй степени от *n* переменных. Приведение уравнения поверхности второго порядка к кано- ническом виду. |

Для лекций по каждому предмету должна быть отдельная тетрадь для лекций. Прежде всего, запишите имя, отчество и фамилию лектора, оставьте место для списка рекомендованной литературы, пособий, справочников.

Будьте внимательны, когда лектор объявляет тему лекции, объясняет Вам место, которое занимает новый предмет в Вашей подготовке и чему но- вому Вы сможете научиться. Опытный студент знает, что, как правило, на первой лекции преподаватель обосновывает свои требования, раскрывает особенности чтения курса и способы сдачи зачета или экзамена.

Отступите поля, которые понадобятся для различных пометок, замеча- ний и вопросов.

Запись содержания лекций очень индивидуальна, именно поэтому трудно пользоваться чужими конспектами.

Не стесняйтесь задавать вопросы преподавателю. Чем больше у Вас будет информации, тем свободнее и увереннее Вы будете себя чувствовать.

Базовые рекомендации:

* не старайтесь дословно конспектировать лекции, выделяйте основные положения, старайтесь понять логику лектора;
* точно записывайте определения, законы, понятия, формулы, теоремы

и т.д.;

* передавайте излагаемый материал лектором своими словами;
* наиболее важные положения лекции выделяйте подчеркиванием;
* создайте свою систему сокращения слов;
* привыкайте просматривать, перечитывать перед новой лекцией пре-

дыдущую информацию;

* + дополняйте материал лекции информацией;
  + задавайте вопросы лектору;
  + обязательно вовремя пополняйте возникшие пробелы.

Правила тактичного поведения и эффективного слушания на лекциях:

* + слушать (и слышать) другого человека – это настоящее искусство, ко- торое очень пригодится в будущей профессиональной деятельности;
  + если преподаватель «скучный», но Вы чувствуете, что он действи-

тельно владеет материалом, то скука – это уже Ваша личная проблема (стоит вообще спросить себя, а настоящий ли Вы студент, если Вам не интересна лекция специалиста?).

Если Вы в чем-то не согласны (или не понимаете) с преподавателем, то совсем не обязательно тут же перебивать его и, тем более, высказывать свои представления, даже если они и кажутся Вам верными. Перебивание препо- давателя на полуслове – это верный признак невоспитанности. А вопросы следует задавать либо после занятий (для этого их надо кратко записать, что- бы не забыть), либо выбрав момент, когда преподаватель сделал хотя бы не- большую паузу, и обязательно извинившись.

## 2 Практические занятия (семинары)

Практические занятия являются важной частью учебного процесса в вузе. Они проводятся с целью закрепления лекционного материала, овладе- ния понятийным аппаратом предмета, методами и приёмами исследования, изучаемыми в рамках учебной дисциплины. Главной целью такого рода заня- тий является научиться применению теоретических знаний на практике.

Содержание практических занятий по дисциплине «Линейная алгебра» представлено в таблице:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Не- деля** | **Наименование раздела**  **/темы дисциплины** | **Содержание** |
| 1-4. | **Матрицы, определители и системы линейных уравнений** | |
| 1-2. | Матрицы и определители | Действия с матрицами. Определитель матрицы.  Обратная матрица, ранг матрицы. Матричные уравнения. |
| 3-4 | Системы линейных уравнений | Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Метод  Гаусса. Фундаментальная система решений однородной сис- темы линейных уравнений. Структура решений неоднород- ной системы |
| 5-9. | **Линейные пространства и подпространства, базис, координаты, линейные опера-**  **торы** | |
| 5-7 | Линейные пространства, размерность | Линейные пространства. Размерность. Базис. Координаты  вектора в базисе. Изменение координат вектора при перехо- де к новому базису. Линейная оболочка векторов. Примене- ние ранга матрицы к исследованию линейной зависимости векторов и нахождению размерности подпространства. Раз- мерность и базис суммы и пересечения подпространств. |
| 7-9 | Операторы | Линейный оператор. Матричная запись и матрица операто- ра. Изменение матрицы оператора при переходе к новому  базису. Действия над операторами. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду, базис  из собственных векторов. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 10-13. | **Евклидовы пространства** | |
| 10-11 | Евклидовы пространства | Пространства со скалярным произведением. Ортогонализа- ция. Ортогональное дополнение, ортогональная составляю- щая. Измерение длин и углов. Матрица Грама. |
| 12-13 | Операторы самосопря-  женный и ортогональный | Сопряженный, самосопряженный и ортогональный операто- ры. Приведение самосопряженного оператора к диагональ- ному виду в ортонормированном базисе. |
| 4. | **Квадратичные формы** | |
| 14-16 | Приведение формы к ка- ноническому виду | Квадратичные формы. Приведение к каноническому (нор- мальному виду). Исследование знакоопределенности. При- ведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к ка- ноническому виду. |

На практическом занятии обсуждаются теоретические положения изу- чаемого материала, уточняются позиции авторов научных концепций, ведет- ся работа по осознанию студентами категориального аппарата изучаемой дисциплины, определяется и формулируется отношение учащихся к теорети- ческим проблемам науки, оформляется собственная позиция будущего спе- циалиста. Форма работы – диалог: и студенты, и преподаватель вправе: зада- вать друг другу вопросы, которые возникли и могут возникнуть у них в про- цессе изучения и обсуждения материала, делиться своими сомнениями, на- блюдениями, приводить доводы «за» и «против» той или иной позиции, обосновывать возможность применения на практике тех или иных теоретиче- ских положений.

Для подготовки к практическому занятию студентам рекомендуется:

* + изучить вопросы, которые будут обсуждаться на занятии;
  + изучить список основной и дополнительной литературы, где студенты могут найти ответы на вопросы, обратить внимание на категории, которыми оперирует автор, выписать основные понятия и систематизировать их;
  + разработать блок-схему, в которой найдут отражение все изучаемые вопросы темы;
  + составить развернутый план изучаемого материала, который может быть использован для ответа на занятии.

В начале занятия студенты под руководством преподавателя более глу- боко осмысливают теоретические положения по теме занятия, раскрывают и объясняют основные положения публичного выступления. В процессе твор- ческого обсуждения и дискуссии вырабатываются умения и навыки исполь- зовать приобретенные знания для различного рода ораторской деятельности.

Ввиду трудоемкости подготовки к практическому занятию преподава- тель может предложить студентам алгоритм действий, рекомендовать еще раз внимательно прочитать записи лекций и уже готовый конспект по теме семинара, тщательно продумать свое устное выступление.

На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к

выступлению по всем поставленным в плане вопросам, проявлять макси- мальную активность при их рассмотрении. Выступление должно строиться свободно, убедительно и аргументировано. Преподаватель следит, чтобы вы- ступление не сводилось к репродуктивному уровню (простому воспроизве- дению текста), не допускается и простое чтение конспекта. Необходимо, что- бы выступающий проявлял собственное отношение к тому, о чем он говорит, высказывал свое личное мнение, понимание, обосновывал его и мог сделать правильные выводы из сказанного. При этом студент может обращаться к за- писям конспекта и лекций, непосредственно к первоисточникам, использо- вать знание художественной литературы и искусства, факты и наблюдения современной жизни и т. д. Вокруг такого выступления могут разгореться споры, дискуссии, к участию в которых должен стремиться каждый.

В заключение преподаватель подводит итоги практического занятия. Он может (выборочно) проверить конспекты студентов и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения.

При изучении дисциплины используется значительное количество ин- терактивных методов обучения. Студенты привлекаются к активной со- творческой работе с преподавателем по поиску и подбору различных учеб- ных материалов с использованием Интернет-ресурсов, а также формирования навыков организации профессионального взаимодействия с различными спе- циалистами.

Перечень образовательных технологий, используемых при осуществ- лении образовательного процесса по дисциплине, представлен в таблице.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ пп** | **Наименование темы дисциплины** | **Вид занятий (лекция, практические**  **занятия)** | **Количество ак. ч.** | **Наименование активных и инте- рактивных форм проведения за- нятий** |
| 1. | Тема 1.  Матрицы и определи- тели | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 2. | Тема 2.  Системы линейных уравнений | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 3. | Тема 3. Линейные про- странства | лекция | 3 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 6 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ.  Контрольная работа |
| 4. | Тема 4. Операторы | лекция | 3 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 6 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ пп** | **Наименование темы дисциплины** | **Вид занятий (лекция,**  **практические занятия)** | **Количество ак. ч.** | **Наименование активных и инте- рактивных форм проведения за- нятий** |
|  |  | ИДЗ. Контрольная работа |
| 5. | Тема 5. Евклидовы пространства | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 6. | Тема 6. Операторы в евклидовых простран- ствах | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально.  Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 7. | Тема 7. Квадратичные формы | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально.  Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |

## 3 Самостоятельная работа обучающихся

Подготовка современного специалиста предполагает, что в стенах ин- ститута он овладеет методологией самообразования, самовоспитания, само- совершенствования. Это определяет важность активизации его самостоя- тельной работы. С целью организации данного вида учебных занятий необ- ходимо в первую очередь использовать материал лекций и семинаров. Лек- ционный материал создает проблемный фон с обозначением ориентиров, на- полнение которых содержанием производится студентами на семинарских занятиях после работы с учебными пособиями, монографиями и периодиче- скими изданиями.

В ходе изучения дисциплины студентам рекомендуется вечером того дня, когда было проведено занятие, прочитать лекцию или просмотреть ре- шение задач на семинаре. За десять минут до начала лекции или семинара также прочитать предыдущую лекцию и просмотреть материалы семинара. Данные рекомендации обусловлены исследованием Эббингауза.

В соответствии с кривой забывания Эббингауза разработаны следую- щие режимы повторения для наилучшего запоминания:

Если есть два дня:

* + первое повторение – сразу по окончании чтения;
  + второе повторение – через 20 минут после первого повторения;
  + третье повторение – через 8 часов после второго;
  + четвёртое повторение – через 24 часа после третьего.

Если нужно помнить очень долго:

* + первое повторение – сразу по окончании чтения;
  + второе повторение – через 20-30 минут после первого повторения;
  + третье повторение – через 1 день после второго;
  + четвёртое повторение – через 2-3 недели после третьего;
  + пятое повторение – через 2-3 месяца после четвёртого повторения Самостоятельно изучается рекомендуемая литература, проводится ра-

бота с библиотечными фондами и электронными источниками информации, специальной литературой, статьями из профильных журналов. Реферируя и конспектируя наиболее важные вопросы, имеющие научно-практическую значимость, новизну, актуальность, делая выводы, заключения, высказывая практические замечания, выдвигая различные положения, студенты глубже понимают вопросы курса.

Подготовка к практическим занятиям, а также выполнение заданий для самостоятельной работы требует от студента навыков работы с литератур- ными источниками:

* + умение выделять главное в тексте;
  + умение составлять опорную схему изученного материала, тезисный и развернутый план-конспект;
  + свободное владение проработанным материалом;
  + способность рассказать своими словами суть проблемы;
  + умение объяснить и дать определение встречающимся в тексте новым научным терминам;
  + умение находить в жизни ситуации, которые могут служить иллюст- рацией теоретического материала, обсуждаемого на занятиях.

Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендо- ванной литературы. Студент может дополнить список использованной лите- ратуры современными источниками, не представленными в списке рекомен- дованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготов- ленные учебные материалы при написании курсовых работ и выпускной ква- лификационной работы.

Важной является готовность студента к восприятию в курсе сочетания философского, теоретического материала с конкретным практическим, на- правленным на освоение умений и навыков практической организации про- фессиональной деятельности в образовательном учреждении.

Подготовка к практическому занятию включает 2 этапа:

1. - организационный;
2. - закрепление и углубление теоретических знаний.

На первом этапе студент планирует свою самостоятельную работу, ко- торая включает:

* + уяснение задания на самостоятельную работу;
  + подбор рекомендованной литературы;
  + составление плана работы, в котором определяются основные пункты предстоящей подготовки. Составление плана дисциплинирует и повышает

организованность в работе.

Второй этап включает непосредственную подготовку студента к заня- тию. Начинать надо с изучения рекомендованной литературы. Необходимо помнить, что на лекции обычно рассматривается не весь материал, а только его часть. Остальная его часть восполняется в процессе самостоятельной ра- боты. В связи с этим работа с рекомендованной литературой обязательна. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практическо- го приложения рассматриваемых теоретических вопросов. В процессе этой работы студент должен стремиться понять и запомнить основные положения рассматриваемого материала, примеры, поясняющие его, а также разобраться в иллюстративном материале. Заканчивать подготовку следует составлением плана (конспекта) по изучаемому материалу (вопросу). Это позволяет соста- вить концентрированное, сжатое представление по изучаемым вопросам.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студентов. Они помогают понять построение изучаемого материала, выде- лить основные положения, проследить их логику и тем самым проникнуть в творческую лабораторию автора.

Ведение записей способствует превращению чтения в активный про- цесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует пом- нить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивиду- альный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Особенно важны и полезны записи тогда, когда в них находят отражение мысли, возникшие при самостоятель- ной работе.

Важно развивать умение сопоставлять источники, продумывать изу- чаемый материал. Большое значение имеет совершенствование навыков кон- спектирования. Преподаватель может рекомендовать студентам следующие основные формы записи: план (простой и развернутый), выписки, тезисы. Ре- зультаты конспектирования могут быть представлены в различных формах.

План – это схема прочитанного материала, краткий (или подробный) перечень вопросов, отражающих структуру и последовательность материала. Подробно составленный план вполне заменяет конспект.

Конспект – это систематизированное, логичное изложение материала источника. Различаются четыре типа конспектов:

* + план-конспект – это развернутый детализированный план, в котором достаточно подробные записи приводятся по тем пунктам плана, которые нуждаются в пояснении;
  + текстуальный конспект – это воспроизведение наиболее важных по- ложений и фактов источника;
  + свободный конспект – это четко и кратко сформулированные (изло- женные) основные положения в результате глубокого осмысливания мате- риала. В нем могут присутствовать выписки, цитаты, тезисы; часть материала может быть представлена планом;
  + тематический конспект – составляется на основе изучения ряда ис-

точников и дает более или менее исчерпывающий ответ по какой-то схеме (вопросу).

В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсужде- ние материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретает- ся практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь.

При необходимости следует обращаться за консультацией к преподава- телю. Идя на консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, кото- рые требуют разъяснения.

Формы организации самостоятельной работы обучающихся (темы, вы- носимые для самостоятельного изучения; вопросы для самоконтроля; типо- вые задания для самопроверки) представлены в таблице.

# ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.** Выполнить дейст- вие:   3 2 1  2 2 2*T*        2 1 2  0 2 2   1 2 3  0 0 2      | **2.** Найти определитель  7 6 3 7  0 5 7 0  0 4 3 0  5 6 5 4 | **3.** Найти ранг матрицы   1 0 1 0      2 2 4 4   3 2 5 4      3 1 4 2 |
| **4.** Найти обратную матрицу   2 2 2      0 2 2   1 0 2    | **5.** Найти общее решение неоднородной системы, построить Ф.С.Р. однородной системы  2*x*1  2*x*2  3*x*3  2*x*4  1 2*x*1  2*x*2  3*x*3  2*x*4  0     *x*1  *x*2  *x*3  2 *x*1  *x*2  *x*3  0     3*x*1  *x*2  4*x*3  2*x*4  3 3*x*1  *x*2  4*x*3  2*x*4  0 | |

1. Решить систему по формулам Крамера и методом Гаусса

*x*1  *x*2  *x*3  6

2*x*  3*x*  5*x*  7

 1 2 3

3*x*1  5*x*2  4*x*3  25



1. Найти координаты вектора

*x*  (7,5)

в базисе *e*1, *e*2 , если он задан в базисе *e*1 , *e*2 :

*e*  *e*  *e* , *e*  4 *e*

 *e* .

1 1 2

2 5 1 2

1. Найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относитель-

но плоскости

*y*  0 .

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в

 0 1 0

 

некотором базисе матрицей  4 4 0

 2 1 



4



1. Проверить, что векторы *f*1  1,2,2,3 и до ортогонального базиса.

*f*2  2,3,2,4 ортогональны, и дополнить их

1. Привести уравнение кривой к каноническому виду с помощью ортогонального преоб-

разования и параллельного переноса

*x*2  *y*2  4*xy*  2*x*  4 *y*  1  0.

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа

4*x*2  8*x x*  4*x x*  3*x*2  4*x*2.

1 1 2 1 3 2 3

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразовани- ем и записать соответствующее преобразование

2*x* 2  2*x* 2  2*x* 2  8*x x*  8*x x*  8*x x* ;

1 2 3 1 2 1 3 2 3

1. Найти ортогональную проекцию *y* и ортогональную составляющую *z* вектора *x*

относительно подпространства, порожденного векторами

→ → →

, если

→  4,1,3,4 ,

→   , →  1,2,2,1; →

 1,0,0,3;

*a*1 , *a*2 , *a*3 *x*

*a*1 1,1,1,1 *a*2 *a*3

→ →

1. Основание параллелепипеда, построенного на векторах

→

*a*, *b* , *c* , лежит в плоскости век-

торов *a*, *b* . Найти высоту параллелепипеда, проведенную к основанию, если в орто-

нормированном базисе

→ → → →

справедливо разложение

→  →  →

 →  → ,

*e*1 , *e*2 , *e*3 , *e*4

*a* 3*e*1 *e*2

*e*3 *e*4

*b*  →

→ → → → → → →

2*e*1  3*e*3  *e*4 , *c*  *e*1  *e*2  *e*3  *e*4 .

1. Найти расстояние от вектора

*x*

5,1,3,3 и угол между *x* и *L* .

→  1,3,1,3

до линейной оболочки *L* векторов 1,1,1,1,

## 4 Оценочные средства по дисциплине

Оценочные средства по дисциплине обеспечивают проверку освоения планируемых результатов обучения посредством мероприятий текущей и промежуточной аттестации.

## Экзамен

***а) типовые вопросы:***

**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ**

1. Матрицы, действия с матрицами (сложение матриц, умножение на число, умножение матриц, транспонирование).
2. Определители квадратных матриц порядка n. Определение по индукции через разло- жение по первой строке.
3. Минор, алгебраическое дополнение. Теорема о разложении определителя по элемен- там ряда (без доказательства).
4. Перестановки, инверсии, четность, нечетность перестановки. Определение определи- теля матрицы размера n через перестановки и инверсии.
5. Свойства определителей. Перестановка строк, транспонирование, линейное свойство. Следствия из свойств. Определители треугольной матрицы, блочной матрицы.
6. Следствие из теоремы о разложении определителя (фальшивое разложение).
7. Обратная матрица. Теорема об обратной матрице.
8. Правило Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений (теорема).
9. Ранг матрицы. Базисный минор. Сохранение ранга при элементарных преобразовани- ях. Линейная зависимость и независимость строк матрицы. Теорема о базисном мино-

ре (без доказательства). Второе определение ранга матрицы (ранг – максимальное ко- личество линейно независимых строк (столбцов) в матрице).

1. Классификация систем линейных алгебраических уравнений – совместные, несовме- стные, определенные, неопределенные. Теорема Кронекера – Капелли. Исследование и решение неоднородных и однородных систем. Метод Гаусса.
2. Ф.С.Р. однородной системы. Структура общего решения неоднородных систем.
3. Линейные пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов линейного пространства.
4. Базис. Размерность. Изоморфизм пространств. Теорема об изоморфности пространств одинаковой размерности над одним числовым полем (без доказательства).
5. Координаты вектора в данном базисе. Действия с координатами. Преобразование ко- ординат при переходе к новому базису.
6. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка векторов. Размерность подпространства. Теорема о размерности линейной оболочки.
7. Пересечение и сумма подпространств. Теорема о размерности суммы и пересечения двух подпространств.
8. Линейные операторы в линейном пространстве. Матрица оператора. Примеры опера- торов и матриц. Теорема о матричной записи линейного оператора (без доказательст- ва).
9. Действия с операторами (сумма, произведение на число, суперпозиция). Обратный оператор.
10. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерности ядра и образа линейного оператора.
11. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная неза- висимость собственных векторов, соответствующих разным собственным значениям. Характеристический многочлен, его инвариантность.
13. Достаточное условие приводимости матрицы оператора к диагональному виду (две теоремы, одна без доказательства).
14. Евклидовы пространства. Определение. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Норма элемента. Неравенство треугольника. Угол между элементами.
15. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис.
16. Матрица Грама ёё применение к вычислению объема n-мерного параллелепипеда (без доказательства).
17. Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства *L* в прямую сумму

любого его подпространства

*L*1  *L*

и ортогонального дополнения к

*L*1 (без доказа-

тельства). Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относи- тельно подпространства. Угол между вектором и подпространством.

1. Сопряженный оператор. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном ба- зисе (без доказательства).
2. Самосопряженный оператор. Основные свойства: вещественность собственных зна- чений, ортогональность собственных векторов, соответствующих разным собствен- ным значениям, существование ортонормированного базиса из собственных векторов (последнее без доказательства).
3. Ортогональный оператор. Сохранение длин и углов, геометрический смысл. Ортого- нальная матрица и её свойства. Ортогональный оператор в 2-мерном случае и теорема об общем виде ортогонального оператора (без доказательства).
4. Квадратичные формы. Изменение матрицы формы при замене базиса.
5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
6. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм (без дока- зательства).
7. Теорема о приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью орто- гонального преобразования.
8. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

***б) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов):***

*Билет содержит один теоретический вопрос и три (две) задачи.*

По результатам выполнения зачетной работы оценивается уровень ос- воения обучающимся материала, предусмотренного учебной программой, уровень владения профессиональными терминами, умение обучающегося использовать теоретические знания при решении практических задач.

Экзамен считается сданным, если итоговый результат за выполненные задания составляет от 24 до 40 баллов. По каждому из 4-х заданий выставля- ется от 0 до 10 баллов.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| Отлично 36-40 | Студент должен:   * продемонстрировать глубокое и прочное усвоение знаний про- граммного материала; * исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно изложить теоретический материал; * правильно формулировать определения; * продемонстрировать умения самостоятельной работы с литера- турой; * уметь сделать выводы по излагаемому материалу. |
| Хорошо 30-35 | Студент должен:   * продемонстрировать достаточно полное знание программного материала; * продемонстрировать знание основных теоретических понятий;   достаточно последовательно, грамотно и логически стройно изла- гать материал;   * продемонстрировать умение ориентироваться в литературе; * уметь сделать достаточно обоснованные выводы по излагаемому материалу. |
| Удовлетворительно 24-29 | Студент должен:   * продемонстрировать общее знание изучаемого материала; * показать общее владение понятийным аппаратом дисциплины; * уметь строить ответ в соответствии со структурой излагаемого вопроса; * знать основную рекомендуемую программой учебную литерату- ру. |
| Неудовлетворительно 23 и меньше | Студент демонстрирует:   * незнание значительной части программного материала; * не владение понятийным аппаратом дисциплины; * существенные ошибки при изложении учебного материала; * неумение строить ответ в соответствии со структурой излагаемо- го вопроса; * неумение делать выводы по излагаемому материалу. |

* 1. **Контрольные работы**

***а) примеры тестовых заданий:***

## Задание для контрольной работы 1

1. Образует ли линейное пространство всех положительных чисел, в котором сумма лю- бых двух элементов 𝑎 и *b* задается как *a*  *b* ; а произведение любого элемента 𝑎 на любое число 𝛾 есть 𝑎𝛾?
2. Найти координаты вектора

*х*  (7,5,2) в базисе *e*' ,*e*' ,*e*' , если он задан в базисе

*e*1, *e*2, *e*3 и *e*1  *e*1  *e*3, *e*2

1 2 3

 *e*1  *e*2 , *e*3  *e*1  *e*2  *e*3 .

1. Решить матричное уравнение

*Х*  2 1  3 5

 

 3 4

 

5 0

1. Найти общее решение неоднородной системы, построить Ф.С.Р. однородной системы

2*x*1  2*x*2  3*x*3  *x*4  1 2*x*1  2*x*2  3*x*3  *x*4  0

*x*  *x*

 *x*  1

*x*  *x*  *x*  0

 1 2 3  1 2 3

3*x*1  *x*2  4*x*3  *x*4  2 3*x*  *x*  4*x*  *x*  0



 1 2 3 4

1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов *ex* , *e**x* , *e*2*x*

на ( ,) .

***б) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов)*** Контрольная работа считается выполненной, если правильно решены как минимум 3 задачи (получено 18 баллов и выше).

Все решенные задания в каждом варианте суммарно оцениваются 30 балла- ми: каждое из заданий оценивается в 6 баллов.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| Отлично  с 27 до30 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Хорошо  с 23 до 26 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Удовлетворительно  с 18 до 22 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Неудовлетворительно  с 0 до 17 баллов | Сумма баллов решенных задач |

***в) примеры тестовых заданий:***

## Задание для контрольной работы 2

→ →

1. Найти матрицу (в базисе (*i* , *j* , *k* ) ), образ и ядро оператора зеркального отражения от-

носительно плоскости

*x*  *y*  *z*  0 .

1. Найти матрицу в базисе *e*1,

*e*2 ,

*e*3  , где *e*1  *~~e~~*1  *e*2  *e*3 , *e*2  *~~e~~*1  *e*2  2*e*3 ,

*e*  *~~e~~*  2*e*  *e* , если она задана в базисе *e* , *e* , *e*

 1 0 2 

3 1 2 3

1 2 3

 3 1 0 .

 

1 1 2 

 

1. Найти собственные векторы и собственные значения  4

2 1

 1 3 1.

 

 1 2 2 

 

Приводится ли матрица к диагональному виду? Если да, то найти диагональный вид и диагонализирующую матрицу.

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа

4*x*2  8*x x*  4*x x*  3*x*2  4*x*2.

1 1 2 1 3 2 3

1. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

3*x*2  3*y*2  2*xy* 12*x*  4 *y* 1  0.

***г) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов)*** Контрольная работа считается выполненной, если правильно решены как минимум 3 задачи (получено 18 баллов и выше).

Все решенные задания в каждом варианте суммарно оцениваются 30 балла- ми: каждое из заданий оценивается в 6 баллов.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| Отлично  с 27 до30 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Хорошо  с 23 до 26 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Удовлетворительно  с 18 до 22 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Неудовлетворительно  с 0 до 17 баллов | Сумма баллов решенных задач |

## 4 Итоговая аттестация по дисциплине

Итоговая аттестация по дисциплине является интегральным показателем ка- чества теоретических и практических знаний и навыков обучающихся по дисциплине и складывается из оценок, полученных в ходе текущей и проме- жуточной аттестации.

Текущая аттестация в семестре проводится с целью обеспечения своевремен- ной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающихся.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины.

Текущая аттестация осуществляется два раза в семестр:

* контрольная точка № 1 (КТ № 1) – выставляется в электронную ведо- мость не позднее 8 недели учебного семестра. Включает в себя оценку мероприятий текущего контроля аудиторной и самостоятельной рабо-

ты обучающегося по разделам/темам учебной дисциплины с 1 по 8 не- делю учебного семестра.

* контрольная точка № 2 (КТ № 2) – выставляется в электронную ведо- мость не позднее 16 недели учебного семестра. Включает в себя оценку мероприятий текущего контроля аудиторной и самостоятельной рабо- ты обучающегося по разделам/темам учебной дисциплины с 9 по 16 неделю учебного семестра.

Результаты текущей и промежуточной аттестации подводятся по шкале балльно-рейтинговой системы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Этап рейтинговой систе- мы /**  **Оценочное средство** | **Неделя** | **Балл** | |
| Минимум\* | Максимум\*\* |
| **Текущая аттестация** | **1-16** | **36 - 60% от мак- симума** | **60** |
| **Контрольная точка № 1** | **8** | **18 (60% от 30)** | **30** |
| Рейтинговая контрольная  работа № 1 | 8 | 18 | 30 |
| **Контрольная точка № 2** | **15-16** | **18 (60% от 30)** | **30** |
| Рейтинговая контрольная  работа № 2 | 15 | 18 | 30 |
| **Промежуточная аттеста- ция** | **-** | **24 (60% от 40)** | **40** |
| Экзамен | - |  |  |
| Экзаменационный билет | - | 24 | 40 |
| **ИТОГО по дисциплине** |  | **60** | **100** |

\* - Минимальное количество баллов за оценочное средство – это количество баллов, на- бранное обучающимся, при котором оценочное средство засчитывается, в противном слу- чае обучающийся должен ликвидировать появившуюся академическую задолженность по текущей или промежуточной аттестации. Минимальное количество баллов за текущую аттестацию, в т.ч. отдельное оценочное средство в ее составе, и промежуточную аттеста- цию составляет 60% от соответствующих максимальных баллов.

Процедура оценивания знаний, умений, владений по дисциплине включает учет успешности по всем видам заявленных оценочных средств.

На каждом практическом занятии выполняются задания по пройден- ным темам согласно рабочему плану изучения дисциплины. Применяется групповое оценивание ответа или оценивание преподавателем.

По окончании освоения дисциплины проводится промежуточная атте- стация в виде экзамена, что позволяет оценить совокупность приобретенных в процессе обучения компетенций. При выставлении итоговой оценки при- меняется балльно-рейтинговая система оценки результатов обучения.

Экзамен предназначен для оценки работы обучающегося в течение все-

го срока изучения дисциплины и призван выявить уровень, прочность и сис- тематичность полученных обучающимся теоретических знаний и умений применять их в решении практических задач, приобретения навыков само- стоятельной работы, развития творческого мышления.

**Итоговая аттестация по дисциплине оценивается по 100-балльной шкале и представляет сумму баллов, заработанных обучающимся при выполнении заданий в рамках текущей и промежуточной аттестации**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Сумма баллов*** | ***Оценка по 4-х балльной***  ***шкале*** | ***Оцен- ка ECTS*** | ***Требования к уровню освоения учебной дис- циплины*** |
| ***90-100*** | 5- «отлично»/  «зачтено» | ***А*** | Оценка «отлично» выставляется обучающе- муся, если он глубоко и прочно усвоил про- граммный материал, исчерпывающе, последо- вательно, четко и логически стройно его изла- гает, умеет тесно увязывать теорию с практи- кой, использует в ответе материал моногра-  фической литературы |
| ***85-89*** | ***4 -*** «хорошо»/  «зачтено» | ***В*** | Оценка «хорошо» выставляется обучающему- ся, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская суще-  ственных неточностей в ответе на вопрос |
| ***75-84*** | ***С*** |
| ***70--74*** | ***D*** |
| 65-69 | 3 - «удовле- творительно»  / «зачтено» | Оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его дета- лей, допускает неточности, недостаточно пра- вильные формулировки, нарушения логиче-  ской последовательности в изложении про- граммного материала |
| 60-64 | ***Е*** |
| ***0-59*** | 2 - «неудовле- творительно»/  «не зачтено» | ***F*** | Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значитель- ной части программного материала, допускает существенные ошибки. Как правило, оценка  «неудовлетворительно» ставится обучающим- ся, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответст- вующей дисциплине |

**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ**

|  |  |
| --- | --- |
| Программа рассмотрена на заседании кафедр высшей математики ИОПП  (протокол № от « » 20 г. | Заведующий/и.о. заведующего кафедры выс- шей математики ИОПП  « » 20 г. В.К. Артемьев  Руководитель ИОПП  « » 20 г. О.А. Попова |
|  |  |
| Программа рассмотрена на заседании отде- ления биотехнологий  (протокол № от « » 2021 г. | Руководитель образовательной программы  03.03.02 Физика  « » 2021 г. Ю.Н. Анохин  Начальник отделения биотехнологий  « » 2021 г. А.А. Котляров |